数理解析研究所講究録
167巻 1972年 62-70

Nonparametric two-sample tests について

熊本大 理　田村 亮二

§1. 序

2標本問題とは，2つの cdf $F(x)$, $G(x)$ からの標本 $X_1, \cdots, X_m$; $Y_1, \cdots, Y_n$ に基いて，帰無仮説 H_0 : $F(x) \equiv G(x)$ を検定する問題であることは良く知られている．F, G には必要に応じて，連続性とか，更に強いところの確率密度の絶対連続と Fisher の情報量の存在等を仮定する．2標本問題で用いられる統計量を適当に拡張したり，修正したりすることによって，多標本－多変量検定，多重比較，更に censored samples による手法に適用されるし，1標本問題も2標本問題として形式化しなおすことができる場合が多いという意味で，2標本問題は Nonparametric statistics において最も基本的でかつ重要な分野であろう．

さて，2標本問題は確率模型の仮定の仕方とか対立仮説の取り方によって，異った手法を生ずる．§2では典型的な

模型，対立仮説の下で，Bell等による asymptotic minimax procedures についての結果を紹介し，§3において，location と scale に対する rank tests の class について論述する．

§2. Asymptotically minimax procedures.

この節では次の3つの対立仮説 K_1, K_2, K_3 について考察する．

K_1 ： Yは X より確率的に大である．これは $G(x) < F(x)$ とかけるが，この意味は $G(x) \leqq F(x)$, $\forall x$ そして $G(x) < F(x)$，正の measure の集合の上で．

定理．（[1]，[2] 参照）

$\Omega(\Delta) = \{ (F, G) \mid G(x) < F(x),\ \sup_x [F(x) - G(x)] \geqq \Delta,$
$F(x)$: 連続 $\}$

$\mathcal{J} = \{$ rank tests ϕ of level $\alpha \mid mT_N = \sum_{i=1}^{m} J_N(\frac{r_i}{N+1})$,
棄却域： $T_N < z_\alpha$，r_i は combined sample における X_i の rank，$N = m+n$，J_N は Chernoff-Savage [5] の条件を満たし，$J_N(t) \xrightarrow{N\to\infty} J(t)$, $0 < t < 1$ $\}$

$\beta_\phi(F, G) =$ test ϕ の power.

φ_0 ： Wilcoxon test，すなわち $mT_N^{\varphi_0} = \sum_{i=1}^{m} r_i/N+1$.

$\Delta_N N^{\frac{1}{4}} \to c\,(>0)$ ならば φ_0 は $\Omega(\Delta_N)$，$\mathcal{J}$ の上で asymptotically minimax である．

$$\sup_{\mathcal{J}} \lim_{N} \inf_{\Omega(\Delta_N)} \beta_\phi(F,G) = \lim_{N} \inf_{\Omega(\Delta_N)} \beta_{\varphi_0}(F,G).$$

この証明は[2]にのべられている．また1標本問題については上と同様な定理が[3]にある．

K_2 : $Pr(X<Y) > Pr(X>Y)$．これは

$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dG(x) = p$ とおくと $p>\frac{1}{2}$ とかける．

定理（[4]参照）

$$\Omega(p) = \{(F,G) \mid \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dG(x) = p\}$$

$$\Omega^*(p_1) = \bigcup_{q \geqq p_1} \Omega(q), \quad p_1 > \frac{1}{2}$$

$\mathcal{J}^* = \{$ test ϕ of level $\alpha\}$, φ_0 : Wilcoxon test

$\alpha < \lim_{N} \inf_{\Omega^*(p_1)} \beta_{\varphi_0}(F,G) = \beta < 1$ なる p_1 に対して

φ_0 は $\Omega^*(p_1)$, $\mathcal{J}^*$ の上で asymptotically minimax である．

$$\sup_{\mathcal{J}^*} \lim_{N} \inf_{\Omega^*(p_1)} \beta_\phi(F,G) = \lim_{N} \inf_{\Omega^*(p_1)} \beta_{\varphi_0}(F,G).$$

K_3 : $G(x) = F(x-\Delta)$ という model を仮定したとき，

$\Delta > 0$（または $\Delta < 0$, $\Delta \neq 0$ 等も考えられる）．

この問題は location problem とか shift problem と呼ばれ，多くの研究がこの問題に集中している．その理由は，このmodel では漸近相対効率という物指しで，検定方式間の比較ができるからであろう．同じような意味であるが，局所的

最強力，漸近的最強力順位検定の理論もでき上っている．
asymptotically minimax については次の定理がある．

定理（[2]）

$\Gamma(\Delta, \gamma) = \{(F, G) \mid G(x) \leqq F(x-\Delta),\ \sigma_F^2 \leqq \gamma\}$

φ_1 : Normal scores test, $mT_N = \sum_{i=1}^{m} E[Z(r_i) \mid \Phi]$

$Z(1) < \cdots < Z(N)$: $N(0,1)$ (cdf Φ) からの順序統計量

$\Delta_N N^{\frac{1}{2}} \to c\ (>0)$ ならば φ_1 は $\Gamma(\Delta_N, \gamma)$, $\mathcal{J}^*$ の上で asymptotically minimax である．

$$\sup_{\mathcal{J}^*} \inf_{\Gamma(\Delta_N, \gamma)} \lim_N \beta_\varphi(F, G) = \inf_{\Gamma(\Delta_N, \gamma)} \lim_N \beta_{\varphi_1}(F, G).$$

K_3 と同様な model として $G(x) = F\left(\frac{x}{\sigma}\right)$ という scale problem についても多くの procedures が議論されているが minimax については知られていない．

§3. Location and scale problem.

§2 の K_3 は $F(x)$, $G(x)$ は分布関数として同じ型で location parameter のみが異るという model であるが，F, G が同じ型であるということは，実際的に納得のゆく場合は多いと思われる．しかし scale parameter まで同じという仮定は強すぎる場合は多いだろう．K_3 より少し一般的な model $G(x) = F\left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right)$ で考えてみよう．このとき，H_0 は

$\theta=0,\ \sigma=1$ となり，対立仮説 $K:\ \theta>0,\ \sigma>1$.
この検定問題に対して location tests である Wilcoxon, Normal scores tests 等は効率の良，不良はともかくとして，一応考えることができる．（棄却域は K_3 のときと同じ）
しかし K の中に σ の命数が入っているので，scale problem に対する配慮も必要になろう．このことは次の事実から分る．

combined sample において第 i 番最小値が X (Y) のとき $Z_{N,i}=1$ (0) $i=1,\cdots,N$ なる確率変数，$z_{N,i}$ $(i=1,\cdots,N)$ は 1 または 0 をとり，N 個のうち m 個だけが 1.
例えば Lehmann[6] にも記載されている如く。

$$P_r\left[Z_{N,i}=z_{N,i},\ i=1,\cdots,N\right]=\binom{N}{n}^{-1}E\left[\prod_{i=1}^{N}\left\{\frac{g(V_N^{(i)})}{f(V_N^{(i)})}\right\}^{1-z_{N,i}}\right]$$

$V_N^{(1)}<\cdots<V_N^{(N)}$: $F(x)$ からの順序統計量

$g(x)=\frac{1}{\sigma}f\left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right)$

H_0 の下では上の値は $\binom{N}{n}^{-1}$，K の下での値を $P(\theta,\sigma)$ とおく．

$$P(\theta,\sigma)=\binom{N}{n}^{-1}\left\{1-\theta\sum_{i=1}^{N}z_{N,i}E\left[-\frac{f'(V_N^{(i)})}{f(V_N^{(i)})}\right]-(\sigma-1)\sum_{i=1}^{N}z_{N,i}\right.$$

$$\left.\times E\left[-1-V_N^{(i)}\frac{f'(V_N^{(i)})}{f(V_N^{(i)})}\right]+o(\theta,\sigma-1)\right\}.$$

$\theta,\ \sigma-1$ が十分小さいところでは，

$$\theta\sum_{i=1}^{N}z_{N,i}E\left[-\frac{f'(V_N^{(i)})}{f(V_N^{(i)})}\right]+(\sigma-1)\sum_{i=1}^{N}z_{N,i}E\left[-1-V_N^{(i)}\frac{f'(V_N^{(i)})}{f(V_N^{(i)})}\right]$$

が小さいとき $P(\theta,\sigma)$ は大きくなる．　しかもこの式の

$$\sum_{i=1}^{N} z_{N,i}\, E\left[-\frac{f'(V_N^{(i)})}{f(V_N^{(i)})}\right], \quad \sum_{i=1}^{N} z_{N,i}\, E\left[-1 - V_N^{(i)}\frac{f'(V_N^{(i)})}{f(V_N^{(i)})}\right] \text{ の } z_{N,i}$$

を $Z_{N,i}$ にかえた統計量はそれぞれ，location および scale problem に対する test statistic である（Hájek [7]）．
以上の議論から K に対する test statistics を定義する．

$$m T_{N,\gamma} = \sum_{i=1}^{N} J_{N,\gamma}\left(\frac{i}{N+1}\right) Z_{N,i} \quad , \quad \gamma = 1,2$$

$$J_{N,\gamma}(t) \xrightarrow{N\to\infty} J_\gamma(t) \quad , \quad 0<t<1$$

$J_{N,\gamma}$, J_γ は Chernoff–Savage の条件を満たす．更に $J_{N,1}$ は location problem に対する weight function とし，例えば $J_1(t)$ として t, $\Phi^{-1}(t)$ を用いる．また $J_{N,2}$ は scale problem に対するもので，例えば $(t-\frac{1}{2})^2$, $\{\Phi^{-1}(t)\}^2$ 等．
実際に用いる rank test statistic の class は

$$T_N = \sqrt{\frac{N}{2}}\left\{\frac{T_{N,1}-\mu_1}{\sigma_{N,1}} + \frac{T_{N,2}-\mu_2}{\sigma_{N,2}}\right\}$$

$$\mu_\gamma = \int_0^1 J_\gamma(t)\,dt$$

$$\sigma_{N,\gamma}^2 = \frac{1-\lambda_N}{\lambda_N}\left[\int_0^1 J_\gamma^2(t)\,dt - \left\{\int_0^1 J_\gamma(t)\,dt\right\}^2\right] \quad , \quad \gamma=1,2$$

$$\left(= \frac{1-\lambda_N}{\lambda_N}\sigma_\gamma^2 \text{ とおく}\right), \quad \lambda_N = \frac{m}{N} \xrightarrow{N\to\infty} \lambda .$$

棄却域は $T_N \leq \xi_{N,\alpha}$ （水準 α）．
H_0 に近い K として，K_N : $\theta = \Delta/\sqrt{N}$, $\sigma = 1+\delta/\sqrt{N}$, $\Delta, \delta > 0$

で考えていく。

定理. T_N の漸近分布は H_0 では $N(0, 1+\sigma_{12})$，
K_N では $N(\mu, 1+\sigma_{12})$.

$$\sigma_{12} = \left[\int_0^1 J_1(t) J_2(t)\, dt - \mu_1 \mu_2\right] / \sigma_1 \sigma_2$$

$$\mu = -\sqrt{\frac{\lambda(1-\lambda)}{2}} \sum_{\gamma=1}^{2} \frac{1}{\sigma_\gamma} \left\{ \Delta \int_{-\infty}^{\infty} J_\gamma'(F(x)) f^2(x)\, dx + \delta \int_{-\infty}^{\infty} x J_\gamma'(F(x)) f^2(x)\, dx \right\}$$

証明.

$$T_N = \sqrt{N}\left[\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{N} J_N\left(\frac{i}{N+1}\right) Z_{N,i} - \mu_N\right]$$

$$J_N\left(\frac{i}{N+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sum_{\gamma=1}^{2} \sigma_{N,\gamma}^{-1} J_{N,\gamma}\left(\frac{i}{N+1}\right)\right]$$

$$\mu_N = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\gamma=1}^{2} \sigma_{N,\gamma}^{-1} \mu_\gamma$$

Chernoff-Savage の定理より結果が得られるが，σ_{12} の計算は少々面倒である。Chernoff-Savage の σ_γ^2 と同様の方法で上の結果がえられる。

なお，$\sigma_{12}=0$ となる $J_\gamma(t)$ を求めてみると，

(i) $J_1(t) = t,\ \Phi^{-1}(t)$ と $J_2(t) = (t-\frac{1}{2})^2,\ \{\Phi^{-1}(t)\}^2$

(ii) $F(x), G(x)$ を $x=0$ に関して対称な任意の分布関数とするとき，$J_1(t) = -\dfrac{f'[F^{-1}(t)]}{f[F^{-1}(t)]}$，$J_2(t) = -1 - G^{-1}(t)\dfrac{g'[G^{-1}(t)]}{g[G^{-1}(t)]}$

$(T_{N,1}, T_{N,2})$ は漸近的に2次元正規分布であるから，上のそれぞれの weight をもった $T_{N,1}, T_{N,2}$ は漸近的に独立となる。

$\sigma_{12}=0$ となる $T_{N,\gamma}$ をとり，T_N をつくる．

系． T_N，$T_{N,1}$（location problem における rank test statistics）による水準 α の rank tests の large sample powers をそれぞれ $\beta(\Delta,\delta)$，$\beta_1(\Delta,\delta)$ とすると，

$$\beta(\Delta,\delta)=\Phi\Big(z_\alpha+\sqrt{\tfrac{\lambda(1-\lambda)}{2}}\sum_{\gamma=1}^{2}\frac{1}{\sigma_\gamma}\Big\{\Delta\int_{-\infty}^{\infty}J_\gamma'(F(x))f^2(x)dx$$
$$+\delta\int_{-\infty}^{\infty}xJ_\gamma'(F(x))f^2(x)dx\Big\}$$

$$\beta_1(\Delta,\delta)=\Phi\Big(z_\alpha+\sqrt{\lambda(1-\lambda)}\frac{1}{\sigma_1}\Big\{\Delta\int_{-\infty}^{\infty}J_1'(F(x))f^2(x)dx$$
$$+\delta\int_{-\infty}^{\infty}xJ_1'(F(x))f^2(x)dx\Big\}$$

$$\Phi(z_\alpha)=\alpha.$$

証明． $\beta(\Delta,\delta)$ は上の定理から容易に得られる．

$F(x)=\Phi(x)$ のとき，$\beta(\Delta,\delta)$ と $\beta_1(\Delta,\delta)$ の比較をする．

(i) $J_1(t)=\Phi^{-1}(t)$，$J_2(t)=\{\Phi^{-1}(t)\}^2$ とすれば，

$$\beta(\Delta,\delta)\geqq\beta_1(\Delta,\delta)\iff\frac{\delta}{\Delta}\geqq 0.293.$$

(ii) $J_1(t)=t$，$J_2(t)=(t-\frac{1}{2})^2$ とすれば

$$\beta(\Delta,\delta)\geqq\beta_1(\Delta,\delta)\iff\frac{\delta}{\Delta}\geqq 0.327.$$

$\frac{\delta}{\Delta}$ が 0 に近くないときは，$T_{N,1}$ による検定よりも scale parameter のことも考慮に入れた T_N による検定の方が large sample power は大きいという1つの例である．

最後に $G(x)=F(\frac{x-\theta}{\sigma})$ という model において，われわれの関心が $\theta=0$ か否かということにあるとすれば，2標本

問題ではなくなるが，いわゆるBehrens-Fisherの問題の一般化となる．これについては余り知られていない．

文　献

[1] Bell, Moses, Thompson (1966) : Goodness criteria for two-sample distribution-free tests. AMS. 37. 133-142

[2] Doksum (1966) : Asymptotically minimax distribution-free procedures. AMS. 37. 619-628

[3] Doksum, Thompson (1971) : Power bounds and asymptotic minimax results for one-sample rank tests. AMS. 42. 12-34

[4] Holm (1971) : On non-parametric asymptotically minimax tests. AMS. 42. 497-508

[5] Chernoff, Savage (1958) : Asymptotic normality and efficiency of certain nonparametric test statistics. AMS. 29. 972-994

[6] Lehmann (1959) : Testing statistical hypothesis. J. Wiley

[7] Hájek, Šidák (1967) : Theory of rank tests. Academic Press.